OBSAH PŘÍRUČKY:

Souhrn všeho, co najdete na dalších stranách v metodickém materiálu Koumadla: Pythagorova věta.

1. Představení tématu + co vše lze koumadlem vysvětlit a ukázat.
2. Baterie koumavých otázek: Sada výzev, badatelských a aplikačních otázek či příkladů, využití v praxi.
3. Slovníček pojmů a související termíny
4. Využití ve výuce:
    a. Tříhodinový model práce s koumadlem ve výuce
    b. Využití koumadla jako vzdělávací pomůcky (1–2 vyučovací hodiny)

1. KOUMEJ DÁL - PYTHAGOROVA VĚTA

Před více než 2500 lety si řecký učenec Pythagoras všiml zajímavé vlastnosti pravoúhlých trojúhelníků. Zjistil, že **čtverce sestrojené nad oběma kratšími stranami mají dohromady stejnou plochu jako čtverec nad nejdelší stranou**.

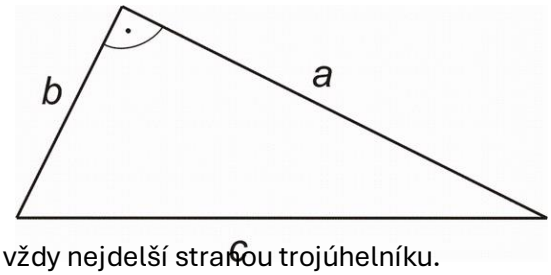
Toto pravidlo dnes známe jako **Pythagorovu větu**.

Pythagorova věta však neplatí pro všechny trojúhelníky, ale pouze pro **pravoúhlé trojúhelníky**. Co to znamená?

Pravoúhlý trojúhelník je takový trojúhelník, který má jeden úhel velký přesně **90°**. Tento úhel nazýváme **pravý úhel**. Značíme ho takovým obloukem s tečkou uprostřed.

Jeho strany mají zvláštní jména:

- **a** – odvěsna,
- **b** – odvěsna,
- **c** – přepona.



Přepona je strana ležící naproti pravému úhlu. Je vždy nejdelší stranou trojúhelníku.

Matematicky tento vztah zapisujeme takto: $a^2 + b^2 = c^2$

Pythagorovu větu využívají:

- stavitelé a tesaři při měření konstrukcí,
- architekti při navrhování budov,
- geodeti při měření pozemků,
- programátoři při práci s grafikou a počítačovými hrami,
- inženýři při návrhu strojů a konstrukcí.

Pomáhá například při navrhování střech, schodišť, mostů nebo při určování vzdáleností v krajině.
Díky Pythagorově větě můžeme vypočítat délku strany, kterou neumíme nebo nemůžeme změřit přímo. Třeba místo lezení na střechu nebo natahování metru přes překážku často stačí změřit dvě jiné strany a dopočítat třetí.
Aplikovat ji můžeme i v mnohem větším měřítku. NASA uvádí Pythagorovu větu mezi matematickými nástroji používanými při studiu vesmíru a astronomie. **Pomáhá počítat vzdálenosti mezi objekty ve vesmíru nebo určit jejich vzájemnou polohu. Toto stejné pravidlo pomáhá astronomům určovat polohu hvězd, družic a kosmických sond.**

1. KOUMAVÉ OTÁZKY:

Skončí Eda jako vítěz, nebo jako placka? Je pátek večer a za 12 hodin začne na hřišti trénink fotbalistů. Dva hlemýždi se vsadí, kdo první dorazí k houbě na druhé straně hřiště. Oba umí pelášit rychlostí 10 m/h. Hřiště má rozměry 100 × 65 m.

Ota jede na jistotu – obchází hřiště po stranách.

Eda bere zkratku – leze přímo přes hřiště. Ale jestli to nestihne do ranního tréninku…

Ota jde po stranách. Obejde dvě strany hřiště.

Vzdálenost	65 + 100 = 165 m
Čas při rychlosti 10 m/h	165 ÷ 10 = 16,5 hodiny

Otu snad nikdo nezašlápne, k cíli dorazí až **za 16,5 hodiny.** Takže až po tréninku.

Eda jde přes hřiště. Leze přímo úhlopříčkou, přeponou pravoúhlého trojúhelníku. Použijeme Pythagorovu větu:

Délka přepony	$c^2 = 65^2 + 100^2$
Druhé mocniny	$c^2 = 4\,225 + 10\,000$
Součet	$c^2 = 14\,225$
Odmocnina	$c = \sqrt{14\,225} \approx 119{,}3$ m
Čas	119,3 ÷ 10 ≈ 11,9 hodiny

Eda dorazí **za méně než 12 hodin**, takže přeleze hřiště těsně před začátkem tréninku.

Naše kočka uvízla na 7 metrů vysokém stromě. Jak velký žebřík potřebuji, abych ji bezpečně snesl dolů? Žebřík si postavím 2 metry od kmene, aby byl dobře stabilní.

- Představ si, že strom, země a žebřík tvoří pravoúhlý trojúhelník.
  - Výška stromu je jedna strana: 7 metrů (její čtverec je 7 * 7 = 49).
  - Vzdálenost žebříku od kmene je druhá strana: 2 metry (jejíž čtverec je 2 * 2 = 4).
  - Když ty dva čtverce sečteme (49 + 4 = 53), dostaneme čtverec délky žebříku.
- Teď už jen stačí najít číslo, které když vynásobíme samo sebou, dá 53 (neboli odmocnina z 53). Je to zhruba 7,3 metru. Takže obyčejný sedmimetrový žebřík by ti nestačil, musel bys mít o kousek delší, abys bezpečně dosáhl až nahoru!

Proč se televize, NB, tablet nebo displej mobilu měří vždycky úhlopříčkou? Proč, když šířka a výška jsou úplně jiná čísla?

- Použití úhlopříčky je asi nejjednoduší způsob, kterým výrobci říkají, jak je daná obrazovka velká. Udává tzv. rozměr obrazu.
- Nic to však neříká o výšce a šířce. Tento údaj si musíme dohledat. Dříve byly monitory a televize v poměru stran 4:3 (šířka ku výšce), tak bylo rychlé a jednoduché spočítat si nebo odhadnout velikost jednotlivých stran na základě úhlopříčky jednotlivé strany. Navíc je docela těžké si zapamatovat přesně hodnotu šířky i výšky (třeba 121 x 68 cm) a tak se ujalo udávat jen jedno číslo - úhlopříčku (třeba 140 cm nebo 55 palců). Hned víme, jestli je obrazovka, televize malá nebo velká.
- Stejně tak to funguje, když si jdeme do obchodu koupit oblečení. Neudáváme přesné míry, ale vybíráme si podle velikostí S (small), M (medium) nebo L (large).

Stojíš na mapě 2 km na východ a 1,5 km na sever od rozhledny. Jak daleko je vzdušnou čarou?

- $d = \sqrt{(2+1{,}52)} = \sqrt{(4+2{,}25)} = \sqrt{6{,}25} \approx 2{,}5\text{km}$
- Vzdušnou čarou jsi od rozhledny vzdálený 2,5 km.

Proč hasiči vozí žebříky dlouhé 20, 30 nebo 40 metrů, když většina domů není ani zdaleka tak vysoká?

Protože žebřík nestojí svisle, ale je nakloněný. Když se opře o budovu, tvoří se zemí a zdí pravoúhlý trojúhelník.

Například máme žebřík o velikosti 20 m a stojí 5 m od domu, pak dosáhne do výšky:

$h = \sqrt{(202-52)} = \sqrt{(400-25)} = \sqrt{375} \approx 19{,}4\text{m}$

Hasiči navíc často potřebují překonat zaparkovaná auta, natáhnout žebřík přes střechu, dostat se k oknům ve vyšších patrech, pracovat bezpečně pod vhodným úhlem. Proto musí být žebřík výrazně delší, než je samotná výška budovy, kam potřebují dosáhnout.

2. SLOVNÍČEK POJMŮ A SOUVISEJÍCÍ TERMÍNY:

PRAVÝ ÚHEL

Pravý úhel je úhel, který má přesně 90°. Poznáš ho třeba v rohu sešitu, dveří nebo okna. Když se dvě čáry setkají tak, že vytvářejí „dokonalý roh“, vznikne pravý úhel.

OBSAH

Obsah neboli plocha říká, kolik místa zabírá nějaký rovný útvar. Například obsah stolu ukazuje, jak velkou plochu máme na kreslení nebo skládání stavebnice. Obsah se měří ve čtverečních jednotkách, například v cm^2 nebo m^2.

GEOMETRIE

Geometrie je část matematiky, která zkoumá tvary, velikosti, úhly, vzdálenosti a polohu věcí. Díky geometrii můžeme navrhovat domy, mosty, hřiště nebo dokonce počítat vzdálenosti ve vesmíru.

ODMOCNINA

Odmocnina nám pomáhá zjistit, jaké číslo musíme vynásobit samo sebou, aby vzniklo jiné číslo. Například odmocnina z 25 je 5, protože $5 \times 5 = 25$.

Odmocnina je vlastně opačná operace než umocnění. Když víme, že $5^2 = 25$, pak také víme, že $\sqrt{25} = 5$.

GEODET

Geodet je člověk, který měří a mapuje krajinu. Zjišťuje například, kde přesně vedou hranice pozemků, jak jsou od sebe vzdálená různá místa nebo jak vysoko leží kopce a budovy. K tomu využívá měřicí přístroje, počítače a často také matematiku, například geometrii a Pythagorovu větu.

ARCHITEKT

Architekt navrhuje budovy a další stavby. Přemýšlí o tom, jak budou vypadat, jak budou bezpečné a jak se v nich bude lidem žít nebo pracovat. Při své práci využívá geometrii, měření a výpočty.

TESAŘ

Tesař vyrábí a staví dřevěné konstrukce, například krovy střech, pergoly nebo mosty. Aby vše dobře sedělo, musí přesně měřit délky, úhly a vzdálenosti.

3. VYUŽITÍ VE VÝUCE

UNIVERZÁLNÍ TŘÍHODINOVÝ MODEL PRÁCE S KOUMADLEM VE VÝUCE

Tento model lze využít v matematice, přírodovědných předmětech, environmentální výchově i projektové výuce. Je navržen tak, aby navazoval na přirozenou dětskou zvídavost, podporoval vzájemné učení mezi žáky a zároveň nekladl vysoké nároky na přípravu vyučujícího.

Jeho princip je jednoduchý: **děti se nejprve s tématem seznamují samostatně a bez tlaku prostřednictvím Koumadla umístěného ve školním prostoru. Ve výuce pak postupně přecházejí od pozorování a kladení otázek k hledání odpovědí, vytváření vlastních vysvětlení, modelů či pomůcek a ke sdílení svých poznatků s ostatními.**

Velkou výhodou tohoto přístupu je, že děti často přicházejí do výuky s určitou zkušeností. Zjišťují, že Koumadlo, které několik týdnů míjely na chodbě nebo si s ním hrály během přestávky, představuje skutečný jev či princip, se kterým se nyní setkávají i ve vyučování. Nové učivo tak nepřichází jako abstraktní informace, ale jako odpověď na otázky, které si žáci již stihli položit.

Výsledkem není pouze pochopení konkrétního vzdělávacího obsahu. Žáci současně rozvíjejí schopnost formulovat otázky, diskutovat, argumentovat, spolupracovat, učit se od ostatních a vysvětlovat své myšlenky srozumitelně druhým.

Nultá hodina: Seznámení s Koumadlem a volné zkoumání ⏱ 5–10 minut

Nultá hodina není samostatnou vyučovací hodinou. Stačí 5-10 minut na konci předcházející hodiny, během nichž učitel představí téma a příslušné Koumadlo, kterému se bude třída v následujících hodinách věnovat, a rozdělí žáky do pracovních skupin (ideálně po 3-5 členech).

V období mezi nultou a první hodinou mají žáci možnost navštívit Koumadlo, samostatně jej prozkoumávat a vyzkoušet si, jak funguje.

Cílem není poskytovat odpovědi na všechny otázky. Důležitější je dát prostor zvědavosti, hře a dopřát tématu čas dozrát.

Diferenciace skupin:

Volba způsobu rozdělení žáků závisí na učiteli. Obě varianty jsou plně funkční. Výběr závisí na charakteru třídy a cílech učitele.

Varianta A – homogenní skupiny	*Varianta B – heterogenní skupiny*
Rozdělení podle úrovně znalostí nebo schopností.	Žáci s různou úrovní znalostí pracují společně.
• lze zadávat různě náročné úkoly, • nadaní žáci mohou řešit složitější výzvy, • slabší žáci získají více času na pochopení základního principu.	• přirozeně vzniká peer-to-peer učení, • žáci si vzájemně vysvětlují poznatky, • podporuje spolupráci a komunikaci.

První hodina: Badatelská práce ve skupinách ⏱ 45 minut

Učitel na začátku hodiny zadá každé skupině badatelskou otázku nebo výzvu. Může využít materiály v sekci Koumej dál - Baterie badatelských otázek nebo QR kód přímo na příslušném Koumadle.

Skupiny společně hledají odpovědi na zadané otázky a ověřují své hypotézy s využitím Koumadla, metodiky a dalších zdrojů. Cílem je dospět k porozumění, při němž **každý člen skupiny dokáže vlastními slovy vysvětlit odpověď ostatním spolužákům.**

Skupina může využívat Koumadlo, vlastní pozorování, diskusi, učebnice, internet i podporu učitele. Učitel však nemá být hlavním zdrojem odpovědí: podporuje diskusi, klade doplňující otázky a pomáhá skupinám, které se dostanou do slepé uličky.

Doporučení

Pokud skupina rychle najde odpověď, je vhodné pokračovat otázkami

- Jak si tím můžete být jistí?
- Platí to vždy?
- Existuje výjimka?
- Jak byste to vysvětlili mladšímu spolužákovi?
- Jak byste to dokázali pomocí Koumadla?

Na konci této hodiny se žáci dozví, že bude následovat hodina, kde budou pracovat na vlastní výukové pomůcce. Děti se mohou přes týden připravovat a přijít na hodinu již připravení ideálně s nápadem.

Druhá hodina: Výroba vlastní pomůcky a příprava konference ⏱ 45 minut

Nyní přichází klíčový krok. Každá skupina dostává za úkol vytvořit vlastní pomůcku, model nebo scénku, pomocí které dokáže ostatním spolužákům představit svou otázku a vysvětlit na ni odpověď.

Pomůcka může být jednoduchá i složitější:

- model z papíru,
- kresba, komiks nebo příběh,
- plakát,
- stavebnice,
- pokus,
- pracovní list,
- digitální prezentace nebo krátké video,
- vlastní improvizované Koumadlo.

Během této hodiny si skupiny zároveň připravují podobu své prezentace na závěrečnou badatelskou konferenci.

Důležité pravidlo: Důležitější, než dokonalé zpracování je schopnost pomoci ostatním pochopit princip. Cílem je odpovědět na otázku: „Jak bychom to vysvětlili někomu, kdo o tématu nikdy neslyšel?“

Třetí hodina: Badatelská konference ⏱ 45 minut

Třída se mění v konferenci. Ve třetí hodině přebírají roli vyučujících samotní žáci.

Úlohou učitele je moderovat diskusi, doplňovat případné nepřesnosti, propojovat jednotlivé poznatky.

Skupiny představují otázky, kterým se v předchozích hodinách věnovaly, a pomocí vlastních pomůcek vysvětlují ostatním spolužákům své závěry. Jednotlivé prezentace na sebe navazují a vytvářejí širší obraz řešeného tématu. Protože všechny skupiny pracovaly se stejným tématem a současně měly možnost během předchozích týdnů pracovat s Koumadlem, mají žáci vytvořeno **společné předporozumění.**

Žáci během 3. hodiny zažijí roli badatele i učitele, dokážou vysvětlit a formulovat své myšlenky a rozumí více aspektům tématu.

Tento model významně rozvíjí:

- badatelské a vědecké myšlení,
- schopnost formulovat otázky,
- kritické myšlení,
- schopnost argumentace,
- komunikační kompetence,
- spolupráci,
- peer-to-peer učení,
- kreativitu a tvorbu vlastních pomůcek,
- schopnost prezentovat a obhajovat vlastní závěry,
- sebevědomí při veřejném vystupování.

Důležitější, než dosažení jediné správné odpovědi je proces hledání, při němž se děti učí klást otázky, hledat souvislosti, ověřovat své domněnky a vysvětlovat své objevy ostatním. Právě tehdy se z učiva stává skutečné porozumění.

Tento model stojí na několika jednoduchých principech, na kterých je postaven celý koncept Koumio®. Nejprve přichází zkušenost a teprve potom teorie. Děti se mohou učit od sebe navzájem, každý na své vlastní úrovni a vlastním tempem. A především: čas pracuje ve prospěch porozumění.

Učivo pak nepřichází jako abstraktní informace, kterou je třeba si zapamatovat, ale jako odpověď na otázku, kterou si žák stihl položit sám. V takové chvíli už neučí pouze učitel. Neučí ani jednotlivé děti. **Učení vzniká společně.** *Jen tak… mimochodem.*

JEDNOHODINOVÝ MODEL PRÁCE S KOUMADELM

Výuka vychází z přímé práce s Koumadlem® jako interaktivní výukovou pomůckou. Sundejte Pythagorovu větu ze zdi a vezměte si ho na pomoc přímo do výuky. Koumadlo může sloužit jako ideální aktivita pro otevření nového tématu, jeho procvičení i závěrečné ověření, zda žáci danému učivu skutečně porozuměli.

Povzbuzujte žáky k tomu, aby nahlas přemýšleli, diskutovali a aktivně s Koumadlem pracovali. Vyvolávejte je k jednotlivým úkolům, nechte je vysvětlovat své úvahy a vzájemně je porovnávat. Žádná otázka není špatná. Instrukce přímo na Koumadle vás i žáky provedou celým bádáním.

UKAŽ na koumadle tři čtverce – jeden velký a dva menší.

- Prozkoumej, čím se liší?
- Který je největší? Které jsou menší?
- Jak spolu podle tebe souvisejí?

PROZKOUMEJ trojúhelník. **VŠIMNI SI** označení jeho stran: **přepona c, odvěsna a, odvěsna b.**

- Které dvě strany svírají pravý úhel?
- Co je to pravý úhel? Jak ho v matematice značíme?
- Kde ve třídě nebo kolem sebe najdeš pravé úhly?
- Jak můžeme ověřit, že je úhel skutečně pravý?
- Znáš nějaké pomůcky, které pomáhají pravý úhel kontrolovat?

Využijte situací a předmětů ve třídě. Žáci mohou hledat pravé úhly na lavicích, dveřích, oknech nebo knihách. K ověřování mohou použít úhelník ("elko"), trojúhelník nebo tesařský úhelník.

VYZKOUŠEJ. Naskládej všechny červené dílky do plochy největšího čtverce, nebo naskládej všechny červené dílky do ploch dvou menších čtverců.

- Vyzkoušej obě možnosti a porovnej výsledek.
- Co pozoruješ?

Chcete-li zapojit celou třídu, přeneste pokus na čtverečkovaný papír. Žáci si narýsují červené tvary, vystřihnou je a poté je skládají buď do jednoho velkého čtverce, nebo do dvou menších čtverců.

Pokud chcete práci urychlit, připravte a nastříhejte tvary předem.

KOUMEJ, co nám 3 čtverce prozradí o pravoúhlém trojúhelníku.

- Jak souvisí velikost velkého čtverce s velikostmi dvou menších čtverců?
- Co se stane, když obsah dvou menších čtverců sečteme?
- Platí tento vztah vždy?
- Dokážeš vlastními slovy formulovat pravidlo pro pravoúhlý trojúhelník?

Obsah čtverce nad přeponou je stejný jako součet obsahů čtverců nad oběma odvěsnami.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Toto pravidlo nazýváme **Pythagorova věta**.
Děti by k němu měly dojít především vlastním zkoumáním a skládáním dílků.

Nechte žáky nejprve formulovat vlastní závěry. Pojmenování „Pythagorova věta“ a zápis vztahu: $a^2 + b^2 = c^2$ přichází až ve chvíli, kdy si žáci sami všimnou souvislosti mezi obsahy čtverců. Tím se vzorec stává výsledkem objevu, nikoli pouhou informací k zapamatování.